数理解析研究所講究録
837巻 1993年 150-163

帯領域 $\frac{1}{2}<\sigma<1$ における Riemann ゼータ関数の二乗平均

岩手大学教育学部 松本 耕二
(Kohji Matsumoto)

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の，臨界領域 $0 \leqq \sigma \leqq 1$ $(\sigma=\mathrm{Re}\, s)$ における挙動が整数論において本質的重要性をもつことは周知の事実であるが，本稿で扱うのはこの領域における $\zeta(s)$ の二乗平均，即ち積分

$$\int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt \qquad (0 \leqq \sigma \leqq 1,\ T>2)$$

である．但し関数等式による対称性から考察を $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$ に限定してよい。とくに $\sigma=\frac{1}{2}$ の場合は既に Hardy, Littlewood の時代から深く研究され，Titchmarsh によって

$$(1) \quad \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 dt = T\log T + (2\gamma-1-\log 2\pi)T + E(T),$$

$E(T)=O(T^{\frac{5}{12}+\varepsilon})$ $(\forall\varepsilon>0,\ \gamma$ は Euler の定数) が 1930 年代に示された。ところが，$E(T)$ と

$$\Delta(x) = {\sum_{n\leq x}}' d(n) - x\log x - (2\gamma-1)x - \frac{1}{4}$$

（ここに $d(n)$ は n の正の約数の個数，$\sum'$ は x が整数のとき，$d(x)$ を $\frac{1}{2}d(x)$ でおきかえることを示す）との間に analogy が成立することはよく知られており，今世紀初頭に Voronoi が既に $\Delta(x)=O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$ を得ていたことと比較すると，

$$(2) \qquad E(T)=O(T^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$$

が証明できると期待することは自然である。この証明はようやく1978年になって，Balasubramanian によって（もう少し強い形で）得られたわけである。

次に $\frac{1}{2}<\sigma<1$ の場合については，近年に至るまで

$$\int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma})$$

しか知られていなかったが，1989年に筆者［9］が，$\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$ なる範囲に限れば

$$(3) \qquad \int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + (2\pi)^{2\sigma-1}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}T^{2-2\sigma} + E_\sigma(T),$$

$$(4) \qquad E_\sigma(T)=O(T^{\frac{1}{1+4\sigma}}\log^2 T)$$

となることを証明した。評価(4)は，(2)と同じ深さの結果である。Balasubramanian による(2)の原証明は複雑なものであったが，Jutila［8］は，Atkinson［1］が1949年に得ていた $E(T)$ の explicit な表示から，(2)が簡単に従うことを指摘した。筆者［9］は $\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$ における Atkinson formula の類似を証明し，そ

こからJutilaの方法で(4)を導いたのである。

Atkinson formulaを記述するために，いくつかの定義をまず与えよう。$\xi>0$に対し

$$e(T,\xi)=\left(1+\frac{\pi\xi}{2T}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{2T}{\pi\xi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{\pi\xi}{2T}}\right)^{-1},$$

$$f(T,\xi)=2T\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{\pi\xi}{2T}}+(\pi^2\xi^2+2\pi\xi T)^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{4},$$

$$g(T,\xi)=T\log\frac{T}{2\pi\xi}-T+\frac{\pi}{4},$$

$$B(T,\xi)=\frac{T}{2\pi}+\frac{1}{2}\xi^2-\xi\left(\frac{T}{2\pi}+\frac{1}{4}\xi^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_{1-2\sigma}(n)=\sum_{d|n}d^{1-2\sigma},$$

そして$X\asymp T$ (i.e. $T\ll X\ll T$) なるXに対し

$$\Sigma_{1,\sigma}(T,X)=\sqrt{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{4}-\sigma}\sum_{n\le X}(-1)^n\sigma_{1-2\sigma}(n)\,n^{\sigma-\frac{5}{4}}e(T,n)\cos(f(T,n)),$$

$$\Sigma_{2,\sigma}(T,X)=2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}\sum_{n\le B(T,\sqrt{X})}\sigma_{1-2\sigma}(n)\,n^{\sigma-1}\left(\log\frac{T}{2\pi n}\right)^{-1}\cos(g(T,n))$$

とおく。このとき，Atkinson [1] が$\sigma=\frac{1}{2}$に対し，また筆者の[9]が$\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$に対して証明したAtkinson formulaとは，

$$E(T)=\Sigma_{1,\frac{1}{2}}(T,X)-\Sigma_{2,\frac{1}{2}}(T,X)+O(\log^2 T) \tag{5}$$

$$E_\sigma(T)=\Sigma_{1,\sigma}(T,X)-\Sigma_{2,\sigma}(T,X)+O(\log T) \tag{6}$$

を主張するものである。証明の詳細等については原論文以外に，Ivićの教科書[6]と講義録[7]がすすめられる。なおMotohashi [14][15] は(5)の別証明を与え，その方法によれば(5)の誤差項を$O(\log T)$に改良できることを指摘している。

筆者の論文[9]中に $\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$ なる制限がある理由は次の通りである。Voronoi が $\Delta(x)=O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$ を導いたのは，彼自身が証明した $\Delta(x)$ のある無限級数表示（Voronoi formula）からなのであるが，この Voronoi formula は Atkinson による (5) の証明の中でも本質的に用いられている。そして[9]における (6) の証明においても，Voronoi formula の類似である次の式が基本的な道具として利用される。即ち，

$$\sum_{n\leq x}{}' \sigma_{1-2\sigma}(n) = \zeta(2\sigma)x + \frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}x^{2-2\sigma} - \frac{1}{2}\zeta(2\sigma-1) + \Delta_{1-2\sigma}(x)$$

で定まる $\Delta_{1-2\sigma}(x)$ に対し，

$$\begin{aligned}\Delta_{1-2\sigma}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}x^{\frac{3}{4}-\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{1-2\sigma}(n)n^{\sigma-\frac{5}{4}}\Big\{\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right) \\ - \frac{16(1-\sigma)^2-1}{32\pi}(nx)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)\Big\} + O(x^{-\frac{1}{4}-\sigma})\end{aligned} \tag{7}$$

が $\frac{1}{2}\leqq\sigma<\frac{3}{4}$ で成り立つ。$\sigma=\frac{1}{2}$ の場合が Voronoi formula であり，上の一般化された形は Oppenheim による。しかし (7) の右辺の級数は $\sigma<\frac{3}{4}$ でしか収束せず，そのことが[9]において条件 $\sigma<\frac{3}{4}$ が現われる自然な理由となっている。

では残された領域 $\frac{3}{4}\leqq\sigma\leqq1$ に対してはどのようなアプローチが可能なのであろうか。Ivić は 1990年に来日したとき，$\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq1$ における平均値理論への "unified approach" が望まれる旨を強調していたが，まず $\sigma=1$ での二乗平均については，彼と Balasubramanian，Ramachandra が取り扱い[2]，

$$\int_2^T |\zeta(1+it)|^2 dt = \zeta(2)T - \pi \log T + O((\log T)^{\frac{2}{3}}(\log\log T)^{\frac{1}{3}})$$

を含む結果を得ている。彼らの証明は近似関数等式にもとずくものである。他方 Motohashi[16] は，評価 (4) が $\frac{1}{2}<\sigma<1$ 全体で成立することを証明した。彼の方法は"重み"つきの積分

$$\frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\sigma+i(T+t))|^2 e^{-(t/\Delta)^2} dt \qquad (\Delta>0)$$

から出発するもので，Atkinson formula そのものは不要となり，$\frac{3}{4}\leqq\sigma<1$ でも議論が進行するのである。Ivić は講義録[7]の2章で，exponent pair の理論を用いて Motohashi の結果を改良し，$\frac{1}{2}<\sigma<1$ の全域において $E_\sigma(T)$ がたしかに (3) の誤差項となること（即ち $E_\sigma(T)=o(T^{2-2\sigma})$）を含む詳しい評価を得ている。

しかし，$\frac{3}{4}\leqq\sigma<1$ においてもより深い研究をすすめていくためには，この範囲の σ に対して Atkinson 型の explicit formula が得られることが望ましいことは当然であろう。最近になって筆者は，Meurman との共同研究により，

<u>定理1</u>　$\frac{1}{2}<\sigma<1$ なる任意の σ に対して (6) が成り立つ。

を証明した。これは Ivić の夢想の第一段階を実現したものということができよう。とくに評価 (4) は今や $\frac{1}{2}<\sigma<1$ なるすべての σ に対して，定理1の直接の系として従う。

証明の基本的なアイデアは，Oppenheim の (7) に代えて，

$$\widetilde{D}_{1-2\sigma}(x)=\int_0^x \sum_{n\le t}\sigma_{1-2\sigma}(n)\,dt$$

に対するVoronoi型formulaを用いることにある。それは

$$\widetilde{D}_{1-2\sigma}(x)=\frac{1}{2}\zeta(2\sigma)x^2+\frac{\zeta(2-2\sigma)}{(2-2\sigma)(3-2\sigma)}x^{3-2\sigma}-\frac{1}{2}\zeta(2\sigma-1)x$$
$$+\frac{1}{12}\zeta(2\sigma-2)+\widetilde{\Delta}_{1-2\sigma}(x),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_{1-2\sigma}(x)&=-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}x^{\frac{5}{4}-\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{1-2\sigma}(n)n^{\sigma-\frac{7}{4}}\cos\left(4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{4}\right)\\&+\frac{(5-4\sigma)(7-4\sigma)}{64\sqrt{2}\pi^3}x^{\frac{3}{4}-\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{1-2\sigma}(n)n^{\sigma-\frac{9}{4}}\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)\\&+O(x^{\frac{1}{4}-\sigma})\end{aligned}\tag{8}$$

というものであって，係数のexplicitな値を別にすれば，Hafner [3] のVoronoi型formulaに関する一般論から容易に導ける式である。重要なことは(8)の右辺が，$\frac{1}{2}\leqq\sigma<1$ において（x の任意の有限閉区間において一様に）収束していることであって，従ってあとは，$\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$ の場合の証明を若干手直しして，(8)が使えるように議論を書き直すことにより，$\frac{3}{4}\leqq\sigma<1$ の場合の(6)の証明ができるのである。

但し，(8)そのものは $\frac{1}{2}<\sigma<1$ の全体で成立する式だけれども，手直しされた証明の細部において $\frac{3}{4}\leqq\sigma$ であることが本質的に効いてくる箇所があり，従って現在のところ，定理1の証明は，$\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$ の場合と $\frac{3}{4}\leqq\sigma<1$ の場合を別々に論

じて最後に貼りあわせる，という形になっている。[9]において筆者は $\sigma=\frac{3}{4}$ の線を"barrier"と形容したが，その状況は依然として，ある意味で残されていることになる。定理1の結論が $\frac{1}{2}<\sigma<1$ の全域を通じて全く同じ形をしている以上，この"barrier"を完全に取り払って，$\frac{1}{2}<\sigma<1$ 全域で成り立つ証明を樹立したいと考えるのは自然なことである。今のところ筆者はそのような方向への手掛りをもっていないけれども，将来そうした統一的証明が見出される可能性はもちろん残されている。だが $\sigma=\frac{3}{4}$ における特異な状況そのものは，やがて複素平面上のうたかたと消えてしまう，といった性質のものではないようである。Atkinson 型 formula からさらに先へ進んで，誤差項 $E_\sigma(T)$ の二乗平均を考察しはじめるとき，$\zeta(s)$ の挙動を左右に分かつ"barrier"が，$\sigma=\frac{3}{4}$ の線上にたしかに存在していることを我々は認めることができる。

$\sigma=\frac{1}{2}$ の線上で，誤差項 $E(T)$ の二乗平均をはじめて考察したのは Heath-Brown [5] であって，彼は

$$(9)\quad \int_2^T E(t)^2\,dt=\frac{2\zeta^4(3/2)}{3\sqrt{2\pi}\,\zeta(3)}T^{\frac{3}{2}}+F(T),$$

$F(T)=O(T^{\frac{5}{4}}\log^2 T)$ なる式を証明した。$F(T)$ の評価はその後 Meurman [13] 及び Motohashi [14] [15] によって $O(T\log^5 T)$ に，

さらにPreissmann[18]及びIvić[7]によって$O(T\log^4 T)$に改良されている。Heath-Brownの論文は，長く無視されてきたAtkinsonの論文を復権させたもの（彼の12乗平均の論文と共に）であるが，Atkinson formulaを用いることさえ思いつけばあとは比較的簡単で，(9)の右辺に$E(T)$のAtkinson formulaを代入して，二乗を展開して，各項をていねいに積分していくだけのことである。同様にして筆者は[9]において，(6)を用いて

$$(10)\quad \int_2^T E_\sigma(t)^2\,dt = \frac{2(2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}}}{5-4\sigma}\cdot\frac{\zeta^2(3/2)}{\zeta(3)}\zeta\left(\frac{5}{2}-2\sigma\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+2\sigma\right)T^{\frac{5}{2}-2\sigma} + F_\sigma(T),$$

$F_\sigma(T)=O(T^{\frac{7}{4}-\sigma}\log T)$を，$\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$に対して証明した。筆者とMeurmanは[11]において，この評価を$O(T)$に改良した。（報告[10]も見られたい。）この改良には，Meurmanが[13]で導入した"averaging"のアイデア，Preissmann[18]（あるいは先行する[17]）によるMontgomery-Vaughanの不等式を適用するアイデア，さらに[11]に独自のものとしてDirichlet多項式の平均値定理の応用，といった援用手段が必要となった。

$\frac{3}{4}\leqq\sigma<1$においてもAtkinson型formulaを得た以上，$E_\sigma(T)$の二乗平均の考察をこの領域でも進めることが望ましいことは言うまでもない。Heath-Brown[5]流の議論を進めてみると，$\frac{3}{4}\leqq\sigma<1$において

$$\int_2^T E_\sigma(t)^2 dt = O(T\log^2 T)$$

を示すことができる。しかし，$F_\sigma(T)=O(T)$ $(\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4})$ の証明に用いられた種々のアイデアを加味すると，さらに強い結果が導ける。

<u>定理2</u>　$\sigma=\frac{3}{4}$ においては

$$(11)\quad \int_2^T E_{\frac{3}{4}}(t)^2 dt = \frac{\zeta^2(3/2)\zeta(2)}{\zeta(3)} T\log T + O(T\sqrt{\log T})$$

であり，また $\frac{3}{4}<\sigma<1$ においては

$$(12)\quad \int_2^T E_\sigma(t)^2 dt = O(T)$$

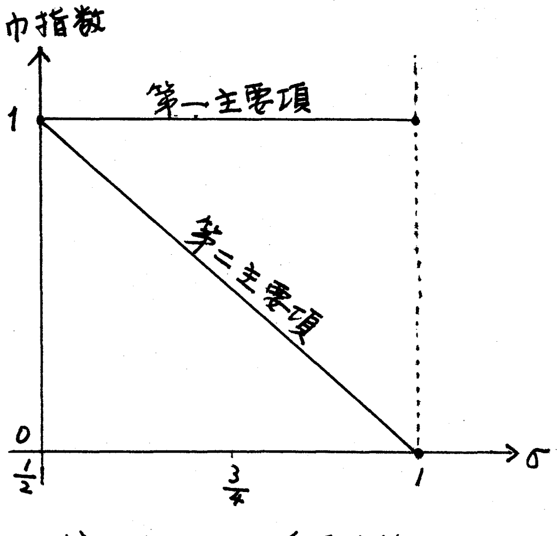
が成り立つ。

この結果は定理1と共に，Meurmanと筆者によるプレプリント[12]の中で証明されている。

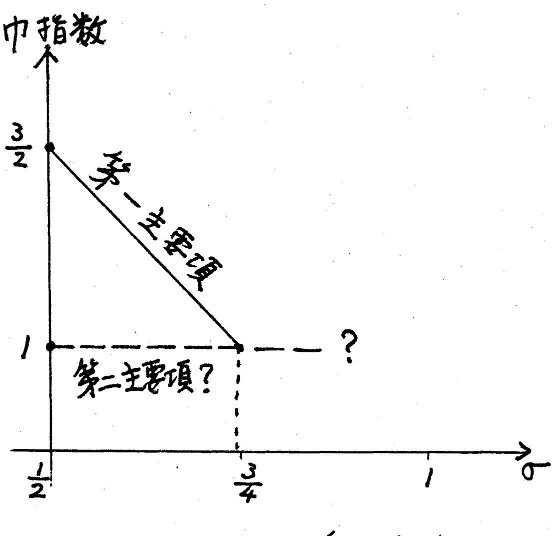
(10)の右辺の主要項の係数は，$\sigma\to\frac{3}{4}-0$ のとき発散する。従って(10)は既に，$\sigma=\frac{3}{4}$ において $E_\sigma(T)$ の二乗平均値に特異な挙動が出現することを示唆しているが，それは(11)式によって裏付けられたといえよう。この状況を $|\zeta(\sigma+it)|$ そのものの二乗平均値公式と比較してみると，後者の場合には，(3)の主要項の係数が発散するのは $\sigma\to\frac{1}{2}+0$ の時であり，そして $\sigma=\frac{1}{2}$ になった瞬間，主要項は(1)のように $\log T$ をしたがえた

形に変身する。この変身は言うまでもなく，$\zeta(s)$ の $\sigma=\frac{1}{2}$ における特異性のひとつのあらわれである。$E_\sigma(T)$ の場合，その二乗平均の主要項が突然 $\log T$ をしたがえて変貌する場所が $\sigma=\frac{3}{4}$ であることは，この $\sigma=\frac{3}{4}$ という線が，関数 $E_\sigma(T)$ にとって，$\sigma=\frac{1}{2}$ が $\zeta(s)$ に対してそうであるのと同様な意味での "critical line" である可能性を示唆する。少くとも $\sigma=\frac{3}{4}$ において，$\zeta(s)$ の挙動に何らかの変化が生じることは疑いようのない事実となったのである。

ところで，[10][11] にも述べたように，$\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$ における評価 $F_\sigma(T)=O(T)$ は best-possible かもしれず，さらに言えば定数 $C(\sigma)$ が存在して $F_\sigma(T)=C(\sigma)T+o(T)$ かもしれない。もしこれが正しければ $C(\sigma)T$ は (10) の右辺における第二主要項となる。$\sigma=\frac{3}{4}$ における式 (11) においても，右辺の誤差項の



$|\zeta(\sigma+it)|$ の二乗平均値



$E_\sigma(T)$ の二乗平均値

評価を $O(T)$ に下げることはおそらく容易で，位数 T の第二主要項がこの場合にも存在している可能性がある．主要項の巾指数（$\log T$ の因子は無視）の変化の様子を前ページに図示しておいたが，これを見ると $\sigma=\frac{3}{4}$ は，$|\zeta(\sigma+it)|$ の二乗平均値公式における $\sigma=\frac{1}{2}$ と同様，第一主要項と第二主要項（$E_\sigma(T)$ の場合その存在は予想にすぎないが）の巾指数が一致する場所であることがわかる。$\sigma>\frac{3}{4}$ になると主要項をもたらしてきた部分が誤差の中に埋没し，状況は一層混沌としてくる。第二主要項が優勢となって $\sigma>\frac{3}{4}$ では

$$\int_2^T E_\sigma(t)^2\,dt = c(\sigma)T + o(T)$$

となるのかもしれないが，現状では評価式(12)以外にわかっている事実は何もない。

最後に Ω-結果に言及して本稿を閉じることにする。Heath-Brown の式(9)は，Good によって別の方法で示されていた結果 $E(T)=\Omega(T^{\frac{1}{4}})$ を含んでいる。同様に(10)，(11)はそれぞれ $E_\sigma(T)=\Omega(T^{\frac{3}{4}-\sigma})$ $(\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4})$，$E_{\frac{3}{4}}(T)=\Omega(\sqrt{\log T})$ を含んでいる。$\sigma=\frac{1}{2}$ においては，これよりかなり強い結果が Hafner-Ivić[4] によって得られている．それは

$$E(T)=\Omega_+\left(T^{\frac{1}{4}}(\log T)^{\frac{1}{4}}(\log\log T)^{(3+\log 4)/4}\exp\left(-C_+\sqrt{\log\log\log T}\right)\right),$$
$$E(T)=\Omega_-\left(T^{\frac{1}{4}}\exp\left(C_-(\log\log T)^{\frac{1}{4}}(\log\log\log T)^{-\frac{3}{4}}\right)\right)$$

(C_+, C_- は正の定数）というものである。$\sigma > \frac{1}{2}$ においては Hafner–Ivić の論法の単純なアナロジーは成功しないのだが，我々は次の結果を証明することができる。

<u>定理3</u>（Matsumoto-Meurman [12]）$\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$ に対し，

$$E_\sigma(T) = \Omega_+\left(T^{\frac{3}{4}-\sigma}(\log T)^{\sigma-\frac{1}{4}}\right).$$

この結果から $F_\sigma(T) = \Omega\left(T^{\frac{9}{4}-3\sigma}(\log T)^{3\sigma-\frac{3}{4}}\right)$ を導くことができるが，これは上記の予想 $F_\sigma(T) \sim C(\sigma)T$ にははるかに及ばない。

定理3の証明には，Atkinson型formula (6) は十分な道具を提供する。しかし $\frac{3}{4} \leqq \sigma < 1$ の領域に入ると (6) は全く無力となり，今のところこの領域で Ω_+-結果を得る手掛りはない。ここでも我々は，$\sigma = \frac{3}{4}$ の "barrier" に遭遇するのである。この "barrier" を越えるには，Atkinson の方法をはるかに強化した何か，あるいはことによると全く異なる方法論による何かが求められているのかもしれない。Atkinson のレンズを通して見た $\frac{3}{4} \leqq \sigma < 1$ の領域，"barrier" の向こう側の世界の風景は，未だ朦朧として，たそがれの国のような深い霧の中に沈んでいるのである。

（1992年11月21日）

文　献.

[1] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, Acta Math. 81 (1949) 353-376.

[2] R. Balasubramanian - A. Ivić - K. Ramachandra, The mean square of the Riemann zeta-function on the line $\sigma = 1$, L'Enseignement Math. 38 (1992) 13-25.

[3] J. L. Hafner, On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions, in "Analytic Number Theory", (M. I. Knopp ed.), Lecture Notes in Math. 899, Springer, 1981, pp. 148-165.

[4] J. L. Hafner - A. Ivić, On the mean-square of the Riemann zeta-function on the critical line, J. Number Theory 32 (1989) 151-191.

[5] D. R. Heath-Brown, The mean value theorem for the Riemann zeta-function, Mathematika 25 (1978) 177-184.

[6] A. Ivić, The Riemann Zeta-Function. The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications, Wiley, 1985.

[7] A. Ivić, Mean Values of the Riemann Zeta Function, Lectures on Math. 82, Tata Inst. Fund. Res., Springer, 1991.

[8] M. Jutila, Riemann's zeta-function and the divisor problem, Ark. Mat. 21 (1983) 75-96.

[9] K. Matsumoto, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip, Japanese J. Math. 15 (1989) 1 – 13.

[10] K. Matsumoto, Mean values of error terms in the theory of the Riemann zeta-function, 解析数論とその周辺 研究集会報告集, 学習院大学, 1991, pp. 101 – 110.

[11] K. Matsumoto - T. Meurman, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip II, preprint 1992.

[12] K. Matsumoto - T. Meurman, —— III, preprint 1992.

[13] T. Meurman, On the mean square of the Riemann zeta-function, Quart. J. Math. Oxford (2) 38 (1987) 337 – 343.

[14] Y. Motohashi, A note on the mean value of the zeta and L-functions IV, Proc. Japan Acad. 62 Ser. A (1986) 311 – 313.

[15] Y. Motohashi, Lectures on the Riemann-Siegel Formula, Ulam Seminar, Dept. of Math., Colorado Univ., 1987.

[16] Y. Motohashi, The mean square of $\zeta(s)$ off the critical line, unpublished manuscript, 1990.

[17] E. Preissmann, Sur la moyenne quadratique du terme de reste du problème du cercle, C.R. Acad. Sci. Paris 306 (1988) 151 – 154.

[18] E. Preissmann, Sur la moyenne quadratique de la fonction zêta de Riemann, preprint.